Mecklenburg-Vorpommern

Musterabitur

Mathematik

Vor- und Nachname des Prüflings

Leistungskurs

Prüfungsteil A – hilfsmittelfreie Aufgaben

Hinweise für den Prüfling

Aufgabenbearbeitung:

Tragen Sie zuerst auf dem Deckblatt Ihren Vor- und Nachnamen ein.

Der Prüfungsteil A beinhaltet

- 4 Pflichtaufgaben aus der Aufgabengruppe 1 (Aufgaben 1 bis 4),
- 6 Wahlaufgaben aus der Aufgabengruppe 2 (Aufgaben 5 bis 10).

Bearbeiten Sie die vier Pflichtaufgaben und zwei Wahlaufgaben.

Fertigen Sie die Lösungen im vorliegenden Aufgabendokument an, zusätzliche Lösungsblätter sind mit Ihrem Namen zu versehen und in dieses Dokument einzulegen.

Bearbeitungszeit:

Für den Prüfungsteil A beträgt die Bearbeitungszeit einschließlich Auswahlzeit maximal 110 Minuten.

Bewertung:

Die Lösungen sind in einer sprachlich korrekten, mathematisch exakten und äußerlich einwandfreien Form darzustellen. In der Niederschrift müssen die Lösungswege nachvollziehbar sein.

Je Aufgabe sind 5 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar. Bearbeiten Sie mehr Wahlaufgaben als gefordert, so wird jeweils die Aufgabe gewertet, welche die höchste Anzahl an BE erbringt.

Hilfsmittel:

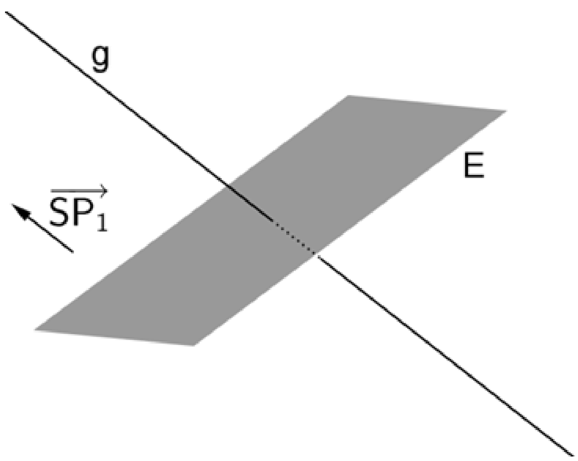
Bearbeiten Sie die Aufgaben ohne Zuhilfenahme einer Formelsammlung (bzw. Tafelwerk) oder eines Taschenrechners.

Folgende Hilfsmittel stehen zur Verfügung:

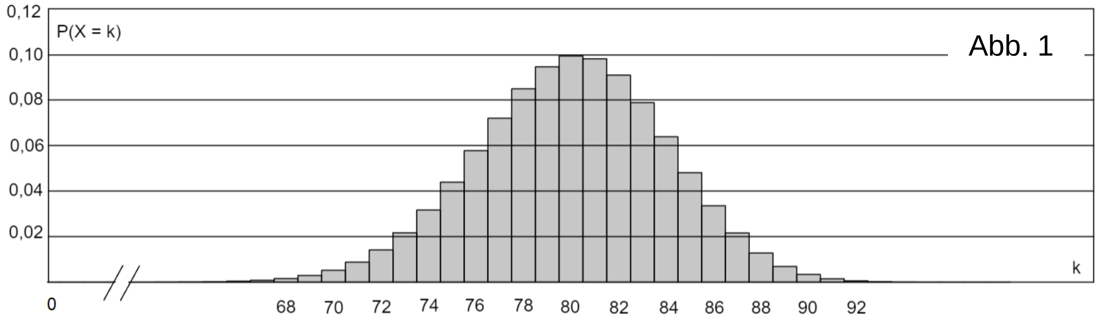
- Zeichengeräte,
- ein Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung in gedruckter oder digitaler Form,
- ein zweisprachiges Wörterbuch in gedruckter oder digitaler Form für Prüflinge mit nichtdeutscher Herkunftssprache.

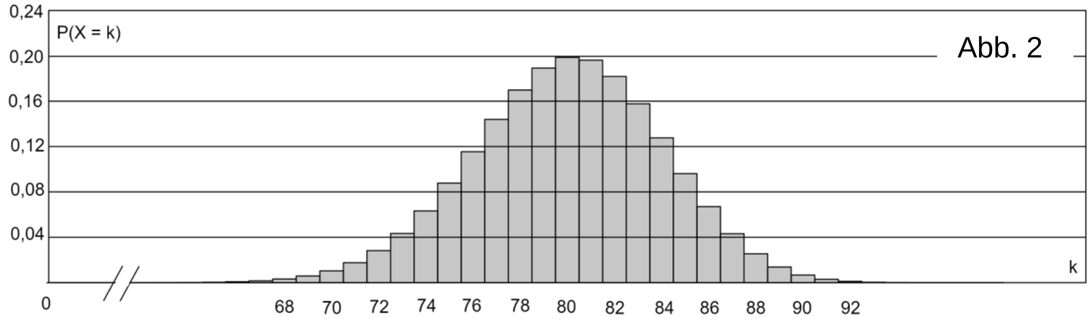
1 **Analysis – Pflichtaufgabe**	BE
Gegeben sind die in IR definierten ganzrationalen Funktionen $f_k(x) = x^4 + (2-k) \cdot x^3 - k \cdot x^2$ mit $k \in \mathbb{R}$.	
1.1 Begründen Sie, dass der Graph von f_2 symmetrisch bezüglich der y-Achse ist.	1
1.2 Es gibt einen Wert von k, für den 1 eine Wendestelle von f_k ist. Berechnen Sie diesen Wert von k.	4

2 **Analysis – Pflichtaufgabe**	BE
Gegeben sind die in IR definierten Funktionen f mit $f(x) = \cos x$ und g mit $g(x) = -x + \frac{\pi}{2}$. Die Graphen von f und g haben in ihrem einzigen gemeinsamen Punkt $P\left(\frac{\pi}{2} \middle\vert 0\right)$ die gleiche Steigung.	
2.1 Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f, der Graph von g und die y-Achse einschließen.	3
2.2 Geben Sie eine Gleichung einer Tangente an den Graphen von f an, die die beiden folgenden Eigenschaften hat: • Die Tangente verläuft parallel zum Graphen von g. • Die Tangente enthält nicht den Punkt P.	2

3 Analytische Geometrie – Pflichtaufgabe	BE
Die Gerade $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ und die Ebene $E\colon\ x + 2y - 2z = 2$ schneiden sich im Punkt S.	
3.1 Berechnen Sie die Koordinaten von S.	3
3.2 Der Punkt P_1 liegt auf g, aber nicht in E. Die Abbildung zeigt die Ebene E, die Gerade g sowie einen Repräsentanten des Vektors $\overrightarrow{SP_1}$. Für den Punkt P_2 gilt $\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OP_1} - 4 \cdot \overrightarrow{SP_1}$, wobei O den Koordinatenursprung bezeichnet. Zeichnen Sie die Punkte S, P_1 und P_2 in die Abbildung ein. 	2

4	**Stochastik – Pflichtaufgabe**	BE
4.1	Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit n = 100 und p = 0,8. Eine der beiden Abbildungen stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dar.	2



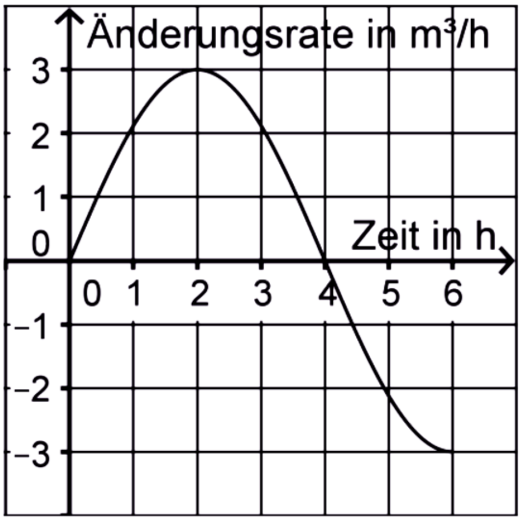
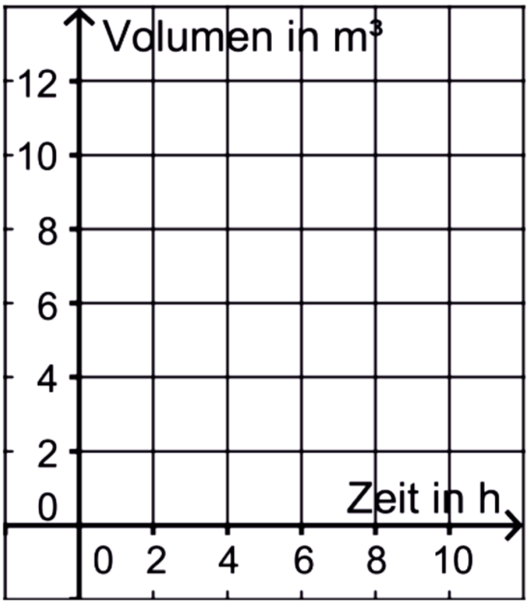


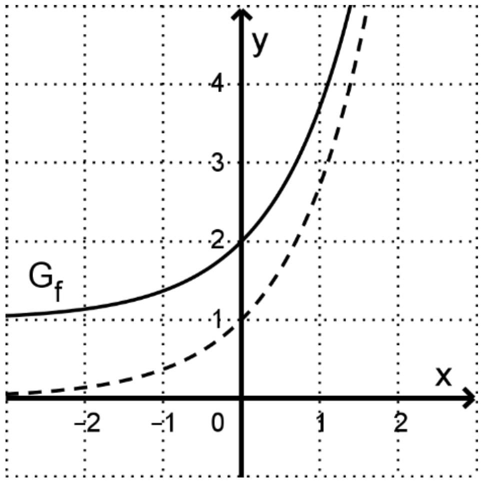
Entscheiden Sie, welche Abbildung diese Wahrscheinlichkeitsverteilung darstellt.

Begründen Sie, warum die andere Abbildung diese Wahrscheinlichkeitsverteilung nicht darstellt.

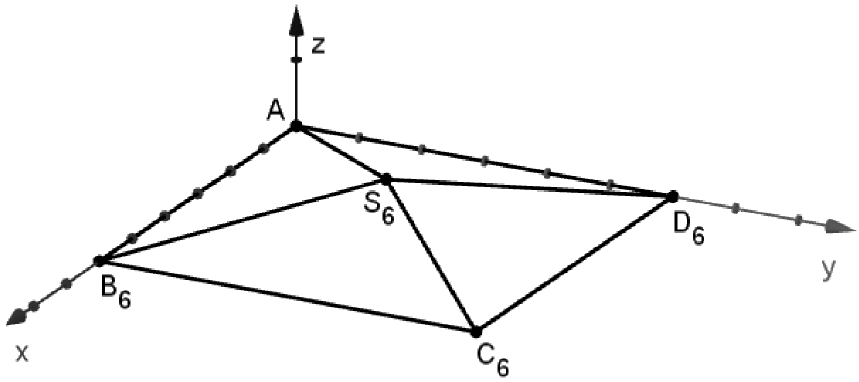
4.2	Betrachtet wird die binomialverteilte Zufallsgröße Y mit den Parametern n und p. Es gilt: • Der Erwartungswert von Y ist 8. • Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y ist symmetrisch. Ermitteln Sie den Wert der Standardabweichung von Y.	3

Hinweis: Von den folgenden Wahlaufgaben 5 bis 10 sind **zwei** zu bearbeiten.

5 Analysis – Wahlaufgabe	BE
Abbildung 1 stellt für einen Wassertank die Zufluss- bzw. Abflussrate (in $\frac{m^3}{h}$) von Wasser für einen Beobachtungszeitraum von sechs Stunden (h) dar. Zu Beginn der Beobachtung enthält der Tank $2\ m^3$ Wasser.  Abbildung 1	
5.1 Bestimmen Sie das Volumen des Wassers, das sich zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn im Tank befindet.	2
5.2 Skizzieren Sie in Abbildung 2 den Graphen, der die Entwicklung des Volumens des Wassers im Tank in Abhängigkeit von der Zeit darstellt.  Abbildung 2	3

6 **Analysis – Wahlaufgabe**	BE
Die Abbildung zeigt den Graphen G_f einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f sowie den Graphen der ersten Ableitungsfunktion von f. 	
6.1 Geben Sie die Steigung der Tangente an G_f im Punkt $(0 \mid f(0))$ an.	1
6.2 Betrachtet wird die Schar der Funktionen g_c mit $c \in \mathbb{R}^+$. Der Graph von g_c geht aus G_f durch Streckung mit dem Faktor c in y-Richtung hervor. Die Tangente an den Graphen von g_c im Punkt $(0 \mid g_c(0))$ schneidet die x-Achse. Bestimmen Sie rechnerisch die x-Koordinate des Schnittpunkts.	4

7 **Analytische Geometrie – Wahlaufgabe**	BE
Der Punkt $P(0\,\vert\,1\,\vert\,5)$ ist Eckpunkt eines Quadrats. Orthogonal zu der Ebene, in der dieses Quadrat liegt, verläuft die Gerade $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\4\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ mit $t\in\mathbb{R}$.	
7.1 Begründen Sie, dass das Quadrat in der yz-Ebene liegt.	2
7.2 Der Schnittpunkt der beiden Diagonalen des Quadrats liegt auf der Gerade g, der Punkt $Q(0\,\vert\,8\,\vert\,4)$ in der yz-Ebene. Zeigen Sie, dass Q einer der beiden Eckpunkte des Quadrats ist, die dem Eckpunkt P benachbart sind.	3

8 Analytische Geometrie – Wahlaufgabe	BE
In einem Koordinatensystem werden die geraden Pyramiden $AB_tC_tD_tS_t$ mit $A(0\|0\|0)$, $B_t(t\|0\|0)$, $C_t(t\|t\|0)$ und $D_t(0\|t\|0)$ und $t \in IR^+$ betrachtet; die Punkte S_t haben jeweils die z-Koordinate $\frac{t}{8}$. Die Abbildung zeigt die Pyramide für $t = 6$.  Die Ebene $E: 3y + 4z = 24$ enthält den Punkt S_t für $t = 12$.	
8.1 Begründen Sie, dass E parallel zur x-Achse verläuft.	1
8.2 Untersuchen Sie, für welche Werte von t die Pyramide und die Ebene E gemeinsame Punkte haben.	4

9 Stochastik – Wahlaufgabe	BE
Eine Urne A ist mit fünf roten und fünf blauen Kugeln gefüllt, eine Urne B mit n roten und $3 \cdot n$ blauen, wobei $n > 0$ gilt. Aus der Urne A wird eine Kugel zufällig entnommen und in die Urne B gelegt. Danach wird aus der Urne B eine Kugel zufällig entnommen und in die Urne A gelegt. Nun befindet sich in der Urne A eine unbekannte Anzahl roter Kugeln.	
9.1 Geben Sie alle Möglichkeiten für diese unbekannte Anzahl an.	1
9.2 Für einen bestimmten Wert von n beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die unbekannte Anzahl roter Kugeln in der Urne A fünf ist, $\frac{15}{29}$. Bestimmen Sie diesen Wert von n.	4

10 Stochastik – Wahlaufgabe	BE
Die Wartezeit X (in Minuten) beim Anrufen einer Service-Hotline kann als normalverteilt modelliert werden mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ.	
10.1 Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass X im Modell den Wert 1,5 annimmt.	1
10.2 Es gilt: $P(X \leq \mu - 1) \approx 0{,}21$ Untersuchen Sie, ob es ein Zeitintervall mit einer Dauer von zwei Minuten gibt, in dem die Wartezeit eines zufällig ausgewählten Anrufers mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 60 % liegt.	4