Mecklenburg-Vorpommern

Musterabitur

Mathematik (CAS)

Vor- und Nachname des Prüflings

Leistungskurs

Prüfungsteil B – komplexe Aufgaben

Hinweise für den Prüfling

Aufgaben-bearbeitung:

Tragen Sie zuerst auf dem Deckblatt Ihren Vor- und Nachnamen ein.

Der Prüfungsteil B beinhaltet
- eine Pflichtaufgabe Analysis (Aufgabe 1),
- zwei Wahlaufgaben Geometrie (Aufgaben 2 und 3) sowie
- zwei Wahlaufgaben Stochastik (Aufgaben 4 und 5).

Bearbeiten Sie die Pflichtaufgabe Analysis, eine Wahlaufgabe Geometrie und eine Wahlaufgabe Stochastik.

Sofern ein entsprechender Hinweis in einer Teilaufgabe gegeben wird, sollen graphische Darstellungen im vorliegenden Aufgabendokument angefertigt werden, andernfalls verwenden Sie bitte bereitgestelltes Papier bzw. Millimeterpapier. Geben Sie auf der Reinschrift Ihren Namen sowie die bearbeiteten Wahlaufgaben an und nummerieren Sie die Seiten Ihrer Arbeit fortlaufend.

Bearbeitungszeit:

Die Bearbeitungszeit für die Prüfungsteile A und B beträgt einschließlich Auswahlzeit 330 Minuten.

Nach Abgabe des Prüfungsteils A steht Ihnen der verbleibende Zeitraum für die Bearbeitung dieses Prüfungsteils B zur Verfügung.

Bewertung:

Die Lösungen sind in einer sprachlich korrekten, mathematisch exakten und äußerlich einwandfreien Form darzustellen. In der Niederschrift müssen die Lösungswege nachvollziehbar sein.

In der Aufgabe 1 zur Analysis sind 30 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar und in den Wahlaufgaben jeweils 20 BE. Bearbeiten Sie mehr Wahlaufgaben als gefordert, so wird jeweils die Aufgabe gewertet, welche die höchste Anzahl an BE erbringt.

Maximal zwei Bewertungseinheiten können zusätzlich vergeben werden bei guter Notation und Darstellung sowie eleganten, kreativen und rationellen Lösungswegen. Maximal zwei Notenpunkte können bei mehrfachen Formverstößen abgezogen werden.

Hilfsmittel:

Folgende Hilfsmittel stehen zur Verfügung:
- eine an der Schule eingeführte Formelsammlung (bzw. Tafelwerk),
- ein an der Schule zugelassenes Computeralgebrasystem (CAS),
- Zeichengeräte,
- ein Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung in gedruckter oder digitaler Form,
- ein zweisprachiges Wörterbuch in gedruckter oder digitaler Form für Prüflinge mit nichtdeutscher Herkunftssprache.

1 Pflichtaufgabe Analysis

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{10^6}x^4 + \frac{4}{9375}x^3 - \frac{13}{250}x^2 + \frac{8}{5}x + 140$ mit dem Definitionsbereich $\mathbb{R}$.

1.1 Berechnen Sie die Extremstellen von f und bestimmen Sie die Art der Extrempunkte des Graphen von f an diesen Stellen. 4 BE

1.2 Der Graph von f schließt mit den Koordinatenachsen und der Gerade mit der Gleichung $x = 240$ ein Flächenstück ein. 4 BE

Bestimmen Sie eine Gleichung der Gerade, die parallel zur y-Achse verläuft und dieses Flächenstück halbiert.

1.3 Für $50 < x < 130$ gibt es ein Paar von x-Werten, die sich um 60 unterscheiden und für die die zugehörigen Funktionswerte übereinstimmen. Bestimmen Sie dieses Paar von x-Werten und geben Sie den zugehörigen Funktionswert an. 4 BE

1.4 Diabetespatientinnen und -patienten haben die Möglichkeit, mithilfe sogenannter CGM-Geräte ihren Glukosewert, d. h. den Anteil der Glukose im Blut, ständig zu messen.

Die gegebene Funktion f beschreibt für $0 \le x \le 240$ modellhaft die Entwicklung des Glukosewerts eines Patienten. Dabei ist x die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Minuten und $f(x)$ der Glukosewert in Milligramm pro Deziliter ($\frac{mg}{dl}$). Die Abbildung 1 zeigt den Graphen von f.

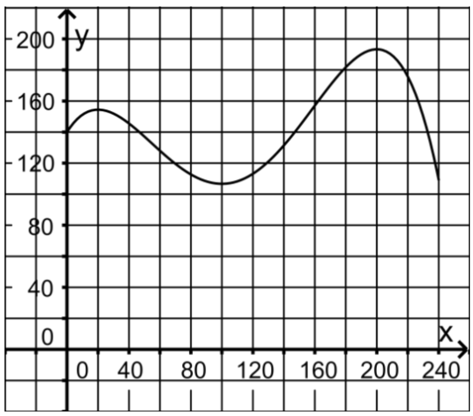


Abbildung 1

1.4.1 Hohe Glukosewerte über längere Zeit gelten als Risikofaktor. Ermitteln Sie für den betrachteten Zeitraum, wie lange Glukosewerte über $170\,\frac{mg}{dl}$ gemessen wurden. 3 BE

1.4.2 Veranschaulichen Sie jeden der folgenden Terme in der Abbildung 2 durch eine Gerade und geben Sie jeweils die Bedeutung des Terms im Sachzusammenhang an. 4 BE

I $\qquad \dfrac{f(100)-f(20)}{100-20}$

II $\qquad \lim\limits_{x\to 60} \dfrac{f(60)-f(x)}{60-x}$

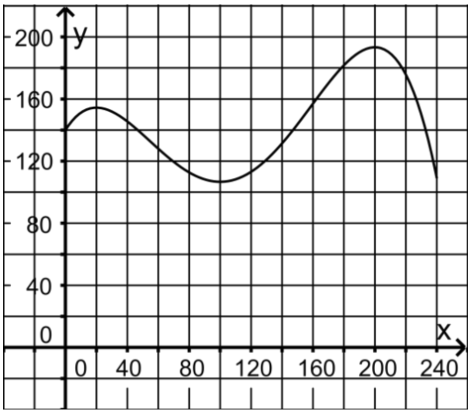


Abbildung 2

1.4.3 Der Mittelwert der Funktionswerte von f für $x \in [a;b]$ kann mit dem folgenden Term berechnet werden: $\frac{1}{b-a} \cdot \int\limits_a^b f(x)\,dx$ 5 BE

Berechnen Sie damit für den Zeitraum von 20 Minuten bis 100 Minuten nach Beobachtungsbeginn den Mittelwert aller Glukosewerte.

Bestimmen Sie dessen prozentuale Abweichung vom Durchschnittswert derjenigen Glukosewerte, die in diesem Zeitraum im Abstand von jeweils zehn Minuten, beginnend mit dem Zeitpunkt 20 Minuten nach Beobachtungsbeginn, gemessen wurden.

Zum Zeitpunkt 240 Minuten nach Beobachtungsbeginn nimmt der Patient Traubenzucker zu sich. Die anschließende Entwicklung des Glukosewerts soll im Modell mithilfe einer Funktion g beschrieben werden, die folgende Bedingung erfüllt:

Die beiden Werte, die das Modell zum Zeitpunkt 240 Minuten nach Beobachtungsbeginn für den Glukosewert und für dessen momentane Änderungsrate liefert, sollen unabhängig davon sein, ob sie mithilfe der Funktion f oder mithilfe der Funktion g ermittelt werden.

Zur Bestimmung eines Funktionsterms von g sollen zunächst die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $h_k(x) = 50 - 50 \cdot (k \cdot x + 1)^2 \cdot e^{-k \cdot x}$ mit $k \in \mathbb{R}^+$ betrachtet werden.

1.4.4 Bestimmen Sie den Wert von k so, dass die momentane Änderungsrate, die sich unter Verwendung von h_k für den Zeitpunkt 0 ergibt, mit der momentanen Änderungsrate übereinstimmt, die f für den Zeitpunkt 240 Minuten nach Beobachtungsbeginn liefert. 2 BE

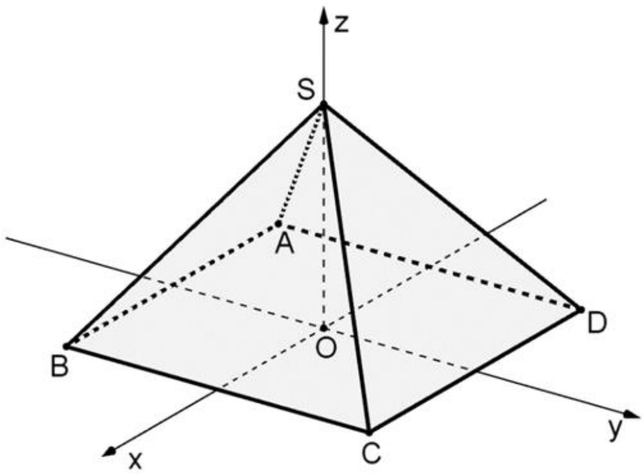
1.4.5 Die für die Funktion g angegebene Bedingung lässt sich erfüllen, wenn der Graph von g durch eine geeignete Verschiebung aus dem Graphen von h_k für $k = \frac{308}{3125}$ hervorgeht. 4 BE

Beschreiben Sie diese Verschiebung und geben Sie einen Funktionsterm von g an.

Hinweis: Von den Wahlaufgaben 2 und 3 ist **eine** zu bearbeiten.

2 Wahlaufgabe Analytische Geometrie

Abbildung 1 zeigt die Pyramide ABCDS mit den Eckpunkten $A(-3\,|-3\,|\,0)$, $B(3\,|-3\,|\,0)$, $C(3\,|\,3\,|\,0)$, $D(-3\,|\,3\,|\,0)$ und $S(0\,|\,0\,|\,4)$ sowie den Punkt $O(0\,|\,0\,|\,0)$, der in der quadratischen Grundfläche der Pyramide liegt. Die Seitenfläche CDS der Pyramide liegt in der Ebene E.



2.1 Berechnen Sie den Inhalt der Oberfläche der Pyramide. 4 BE

2.2 Genau eine der folgenden Gleichungen (1) bis (3) beschreibt eine Symmetrieebene der Pyramide. 3 BE

Geben Sie diese Gleichung an und begründen Sie für eine der anderen Gleichungen, dass die durch sie beschriebene Ebene keine Symmetrieebene der Pyramide ist.

(1) $x - z = 0$ (2) $x + y + z = 4$ (3) $x + y = 0$

2.3 Ermitteln Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform. 3 BE

zur Kontrolle: $4y + 3z = 12$

2.4 Es gibt einen Punkt $P(0\,|\,0\,|\,p)$, der im Innern der Pyramide liegt und von allen vier Seitenflächen sowie der Grundfläche der Pyramide den gleichen Abstand hat. Mithilfe des folgenden Gleichungssystems lässt sich der Wert von p bestimmen: 6 BE

I $\quad \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

II $\quad 4 \cdot 4t + 3 \cdot (p + 3t) = 12$

III $\quad \left|\overrightarrow{PQ}\right| = p$

Erläutern Sie die Überlegungen im geometrischen Zusammenhang, die diesem Vorgehen zur Bestimmung des Werts von p zugrunde liegen.

Berechnen Sie diesen Wert von p.

2.5 Die Ebene E gehört zur Schar der Ebenen $E_k:\ 4k\cdot x+4\sqrt{1-k^2}\cdot y+3\cdot z=12$ mit $k\in[-1;1]$. Die Seitenfläche ADS der Pyramide liegt in der Ebene E_{-1} der Schar, die Seitenfläche BCS in der Ebene E_1. 4 BE

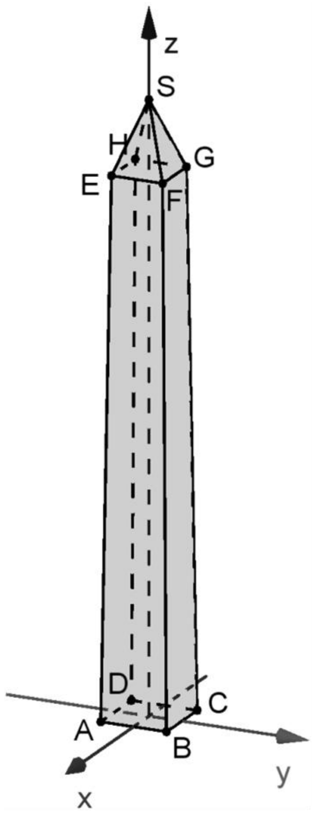
Weisen Sie nach, dass die Größe des Winkels, unter dem die Gerade OS die Ebene E_k schneidet, unabhängig von k ist, und bestimmen Sie diese Größe.

3 Wahlaufgabe Analytische Geometrie

Die Abbildung zeigt – nicht maßstabsgetreu – ein Modell eines Obelisken. Im verwendeten Koordinatensystem beschreibt die xy-Ebene den ebenen Untergrund, auf dem der Obelisk steht; eine Längeneinheit entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.

Der untere Teilkörper ABCDEFGH mit $B(0{,}45\,|\,0{,}45\,|\,0)$ ist ein Stumpf einer geraden Pyramide. Der Mittelpunkt des Quadrats ABCD ist der Koordinatenursprung. Das Quadrat EFGH ist parallel zur xy-Ebene.

Der obere Teilkörper EFGHS mit $E(0{,}35\,|\,-0{,}35\,|\,7{,}16)$ ist eine gerade Pyramide. Der Punkt S liegt auf der z-Achse und stellt die Spitze des Obelisken dar.



3.1 Im Folgenden sind Schritte der Lösung einer Aufgabe angegeben, die im Zusammenhang mit einem der betrachteten geometrischen Objekte steht. 2 BE

$$\begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}45\\-0{,}45\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-0{,}1\\0{,}1\\7{,}16\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad r=4{,}5\quad\Rightarrow\quad z=32{,}22$$

Geben Sie eine passende Aufgabenstellung an.

3.2 Berechnen Sie die Größe der Neigungswinkel der Seitenkanten des unteren Teilkörpers gegenüber dem Untergrund. 2 BE

3.3 Bestimmen Sie den Flächeninhalt einer der Seitenflächen des unteren Teilkörpers. 4 BE

3.4 Der untere Teilkörper des Obelisken besteht aus Granit. Ein Kubikmeter des verwendeten Materials hat eine Masse von 2,6 Tonnen. Bestimmen Sie die Masse des unteren Teilkörpers. 5 BE

3.5 Vom Obelisken soll für ein Museum ein kleines maßstabsgetreues Modell mit einer Grundkantenlänge von 18 cm angefertigt werden. 2 BE

Geben Sie das Verhältnis zwischen dem Volumen des Modells und dem des Obelisken in der Wirklichkeit an und begründen Sie Ihre Angabe.

3.6 Auf den Obelisken treffendes Sonnenlicht kann im Modell durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dargestellt werden Der Abstand des auf dem Untergrund liegenden Schattens der Spitze des Obelisken von dem Punkt, der im Modell durch B dargestellt wird, beträgt 5,1 Meter. 5 BE

Ermitteln Sie die Höhe des Obelisken.

Hinweis: Von den Wahlaufgaben 4 und 5 ist **eine** zu bearbeiten.

4 Wahlaufgabe Stochastik

4.1 Für ein Schwimmbad besitzen 2000 Personen eine Jahreskarte. Für einen bestimmten Tag beschreibt die Zufallsgröße X die Anzahl der Jahreskartenbesitzer, die das Schwimmbad besuchen. Vereinfachend soll davon ausgegangen werden, dass X binomialverteilt ist. Dabei beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Jahreskartenbesitzer an diesem Tag das Schwimmbad besucht, 10 %.

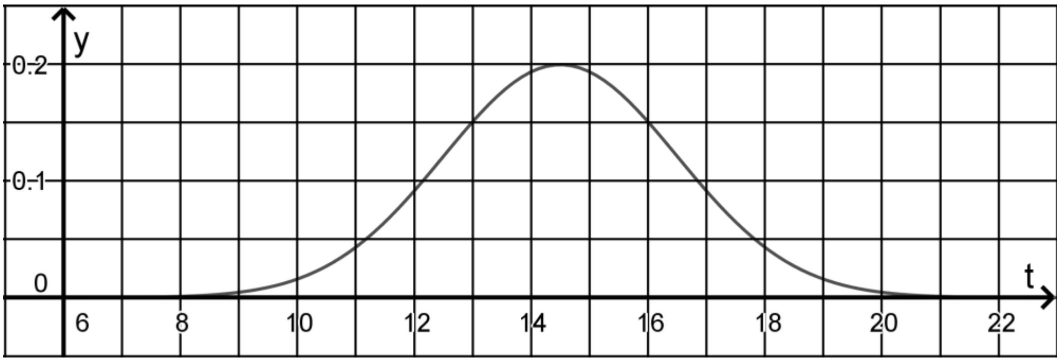
4.1.1 Es gilt $P(X = 210) \approx 2{,}2\,\%$. Interpretieren Sie diese Aussage im Sachzusammenhang. 2 BE

4.1.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass am betrachteten Tag mehr als 210 Jahreskartenbesitzer das Schwimmbad besuchen. 2 BE

4.1.3 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als 193, aber weniger als 207 Jahreskartenbesitzer das Schwimmbad besuchen. 2 BE

4.1.4 Bestimmen Sie die größte natürliche Zahl k, für die die Wahrscheinlichkeit dafür, dass am betrachteten Tag weniger als k Jahreskartenbesitzer das Schwimmbad besuchen, kleiner als 10 % ist. 3 BE

4.2 An einem bestimmten Tag ist das Schwimmbad zwischen 07:00 Uhr und 21:00 Uhr geöffnet. Es soll davon ausgegangen werden, dass der Zeitpunkt, zu dem ein zufällig ausgewählter Badegast das Schwimmbad betritt, mithilfe einer normalverteilten Zufallsgröße mit dem Erwartungswert 14,5 und der Standardabweichung 2 beschrieben werden kann. Die zugehörige Dichtefunktion ist in der Abbildung dargestellt; dabei ist t die seit 00:00 Uhr vergangene Zeit in Stunden.



4.2.1 Geben Sie den Zeitraum mit einer Länge von einer Stunde an, für den mit der größten Anzahl eintreffender Badegäste zu rechnen ist. 1 BE

4.2.2 Ermitteln Sie graphisch, ob die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Badegast das Schwimmbad zwischen 12:00 Uhr und 16:00 Uhr betritt, größer als 50 % ist. Erläutern Sie Ihr Vorgehen. 4 BE

4.2.4 Am betrachteten Tag wird das Schwimmbad von 2500 Badegästen besucht. 3 BE

Ermitteln Sie rechnerisch, zu welchem Zeitpunkt mit dem Eintreffen des eintausendfünfhundertsten Badegasts zu rechnen ist.

4.2.5 Beurteilen Sie mithilfe einer Rechnung die folgende Argumentation: 3 BE

Das Schwimmbad ist nur zwischen 07:00 Uhr und 21:00 Uhr geöffnet. Deshalb ist es nicht sinnvoll, das Eintreffen der Badegäste mithilfe einer normalverteilten Zufallsgröße zu beschreiben.

5 Wahlaufgabe Stochastik

Ein Institut für Ernährungsforschung untersucht die Essgewohnheiten von in Deutschland lebenden Personen einer bestimmten Altersgruppe.

Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass sich 30 % der Personen der betrachteten Gruppe häufig von Fertiggerichten ernähren.

5.1 Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Zufallsexperiment, bei dem die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit dem Term 3 BE

$$1-\sum_{k=55}^{200}\binom{200}{k}\cdot 0{,}3^{k}\cdot 0{,}7^{200-k}$$

berechnet werden kann. Geben Sie dieses Ereignis an.

5.2 Es werden Personen der betrachteten Gruppe zufällig ausgewählt. 3 BE

Ermitteln Sie, wie groß die Anzahl der ausgewählten Personen mindestens sein müsste, damit sich von diesen mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % mindestens eine Person häufig von Fertiggerichten ernährt.

Neben der Ernährung durch Fertiggerichte wird auch der Verzehr von Zucker untersucht. Der Anteil der Personen der betrachteten Gruppe, die sich häufig von Fertiggerichten ernähren und zu viel Zucker verzehren, beträgt 24 %. Insgesamt beträgt der Anteil aller Personen, die sich nicht häufig von Fertiggerichten ernähren und zu viel Zucker verzehren, 28 %. Aus der betrachteten Gruppe wird eine Person zufällig ausgewählt.

Untersucht werden folgende Ereignisse:

- F: „Die Person ernährt sich häufig von Fertiggerichten."
- Z: „Die Person verzehrt zu viel Zucker."

5.3 Stellen Sie den Sachverhalt in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar und deuten Sie $P\left(F\cap\overline{Z}\right)$ im Sachzusammenhang. 4 BE

5.4 Nun werden fünf Personen aus der betrachteten Gruppe zufällig ausgewählt. 3 BE

Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden kann, dass keine dieser Personen zu viel Zucker verzehrt und sich höchstens zwei von ihnen häufig von Fertiggerichten ernähren.

5.5 Die Geschäftsführerin einer Firma für Fertiggerichte vermutet, dass der Anteil der Personen, die sich von Fertiggerichten ernähren, erhöht hat. Dazu stellt sie die Nullhypothese „Der Anteil der Personen, die sich von Fertiggerichten ernähren, ist höchstens 30 %." auf und untersucht diese auf einem Signifikanzniveau von 4 % bei einer Stichprobengröße von 450 Personen.

5.5.1 Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel. 5 BE

5.5.2 Beurteilen Sie die Größe des Fehlers zweiter Art, wenn sich tatsächlich 32 % der Personen von Fertiggerichten ernähren. 2 BE