Mecklenburg-Vorpommern

Musterabitur

Mathematik (CAS)

Leistungskurs

Hinweise für die Lehrkraft
zur Durchführung, Korrektur und Bewertung
(nicht für die Hand des Prüflings)

Hinweise für die Lehrkraft

Aufgaben-bearbeitung:

Die Prüfungsarbeit besteht aus den Teilen A und B.

Der Prüfling erhält zunächst die Aufgaben für den Teil A mit den hilfsmittelfreien Aufgaben. Dieser beinhaltet
- 4 Pflichtaufgaben aus der Aufgabengruppe 1 (Aufgaben 1 bis 4),
- 6 Wahlaufgaben aus der Aufgabengruppe 2 (Aufgaben 5 bis 10).

Der Prüfling bearbeitet die vier Pflichtaufgaben und zwei Wahlaufgaben.

Nach Abgabe der Aufgaben des Teils A erhält der Prüfling die Aufgaben des Teils B sowie die dafür vorgesehenen Hilfsmittel. Der Prüfungsteil B beinhaltet
- eine Pflichtaufgabe Analysis (Aufgabe 1),
- zwei Wahlaufgaben Geometrie (Aufgaben 2 und 3) sowie
- zwei Wahlaufgaben Stochastik (Aufgaben 4 und 5).

Der Prüfling bearbeitet die Pflichtaufgabe Analysis, eine Wahlaufgabe Geometrie und eine Wahlaufgabe Stochastik.

Bearbeitungszeit:

Die Bearbeitungszeit für die Prüfungsteile A und B beträgt einschließlich Auswahlzeit 330 Minuten. Der Prüfling entscheidet selbstständig über den Zeitraum der Bearbeitung des Teils A, dieser Zeitraum darf jedoch maximal 110 Minuten betragen.

Hilfsmittel:

Dem Prüfling stehen folgende Hilfsmittel zur Verfügung:
- eine an der Schule eingeführte Formelsammlung (bzw. Tafelwerk),
- ein an der Schule zugelassenes Computeralgebrasystem (CAS),
- Zeichengeräte,
- ein Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung in gedruckter oder digitaler Form,
- ein zweisprachiges Wörterbuch in gedruckter oder digitaler Form für Prüflinge mit nichtdeutscher Herkunftssprache.

Für die Aufgaben des Teils A sind Formelsammlung (bzw. Tafelwerk) und CAS nicht zulässig.

Bewertung:

Die Lösungen sind in einer sprachlich korrekten, mathematisch exakten und äußerlich einwandfreien Form darzustellen. In der Niederschrift müssen die Lösungswege nachvollziehbar sein.

Im Teil A sind je Aufgabe 5 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, im Teil B in der Pflichtaufgabe 30 BE und in den Wahlaufgaben jeweils 20 BE. Bearbeitet ein Prüfling mehr Wahlaufgaben als gefordert, so wird jeweils die Aufgabe gewertet, welche die höchste Anzahl an BE erbringt.

Maximal zwei Bewertungseinheiten können zusätzlich vergeben werden bei guter Notation und Darstellung sowie eleganten, kreativen und rationellen Lösungswegen, maximal zwei Notenpunkte können bei mehrfachen Formverstößen abgezogen werden. Allein durch die Bearbeitung einer weiteren Wahlaufgabe im Teil A ist keine zusätzliche Bewertungseinheit erreichbar.

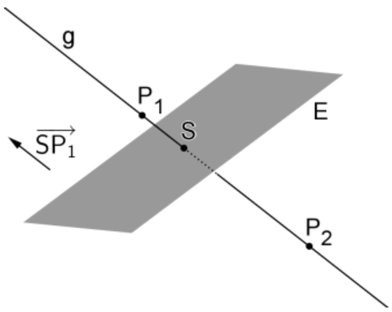
Bewertungstabelle – Leistungskurs, Teile A und B

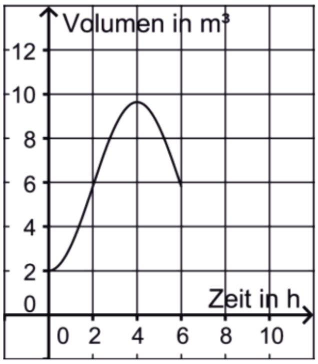
Bewertungseinheiten	Notenpunkte
95 bis 100	15
90 bis 94	14
85 bis 89	13
80 bis 84	12
75 bis 79	11
70 bis 74	10
65 bis 69	09
60 bis 64	08
55 bis 59	07
50 bis 54	06
45 bis 49	05
40 bis 44	04
33 bis 39	03
27 bis 32	02
20 bis 26	01
0 bis 19	00

Die Verteilung der Bewertungseinheiten auf die Teilaufgaben ist verbindlich.

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar.
Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

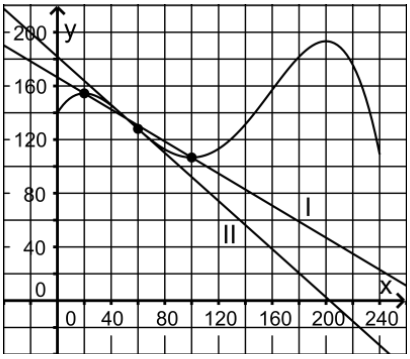
Teil A Erwartungshorizont

Aufgabe	Pflichtaufgaben – Aufgabengruppe 1	mögliche BE	erteilte BE
1.1	Der Funktionsterm von f_2 enthält nur Potenzen von x mit geraden Exponenten.	1	
1.2	$f_k'(x)=4x^3+3\cdot(2-k)\cdot x^2-2kx$ $f_k''(x)=12x^2+6\cdot(2-k)\cdot x-2k$ $f_k''(1)=0 \Leftrightarrow 24-8k=0 \Leftrightarrow k=3$	4	
2.1	$\int_0^{\pi/2}(g(x)-f(x))\,dx=\left[-\frac{1}{2}x^2+\frac{\pi}{2}x-\sin x\right]_0^{\pi/2}$ $=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi^2}{4}-1=\frac{\pi^2}{8}-1$	3	
2.2	$y=-x-\frac{3}{2}\pi$	2	
3.1	$2r+2\cdot(2+4r)-2r=2 \Leftrightarrow r=-\frac{1}{4}$, d. h. $S\left(-\frac{1}{2}\,\middle\|\,1\,\middle\|\,-\frac{1}{4}\right)$	3	
3.2		2	
4.1	Abbildung 1 stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dar. Abbildung 2 kann die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X nicht darstellen, da die Summe aller Wahrscheinlichkeiten größer als 1 wäre.	2	
4.2	Aufgrund der Symmetrie der Wahrscheinlichkeitsverteilung gilt $p=0{,}5$. $n\cdot 0{,}5=8 \quad \Leftrightarrow \quad n=16$ $\sigma=\sqrt{16\cdot 0{,}5\cdot(1-0{,}5)}=\sqrt{4}=2$	3	
	Summe:	**20**	

Aufgabe	Wahlaufgaben – Aufgabengruppe 2	mögliche BE	erteilte BE
5.1	Zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn befinden sich etwa 5,8 m^3 Wasser im Tank.	2	
5.2		3	
6.1	Die Steigung ist 1.	1	
6.2	Tangente an den Graphen von g_c : $y = g_c'(0) \cdot x + g_c(0) = c \cdot f'(0) \cdot x + c \cdot f(0) = c \cdot x + 2c$ $c \cdot x + 2c = 0 \Leftrightarrow x = -2$	4	
7.1	P liegt in der yz-Ebene, der Richtungsvektor von g steht senkrecht dazu.	2	
7.2	Schnittpunkt der Diagonalen: $S(0 \mid 4 \mid 1)$ Mit $\overrightarrow{SP} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{SQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ergibt sich: $\left\lvert\overrightarrow{SP}\right\rvert = \left\lvert\overrightarrow{SQ}\right\rvert$ und $\overrightarrow{SP} \circ \overrightarrow{SQ} = 0$	3	
8.1	Die Gleichung von E liefert nur eine Bedingung für die y- und die z-Koordinate der Punkte der Ebene.	1	
8.2	E schneidet die xy-Ebene in der Gerade g mit der Gleichung $y = 8$. Für $t = 8$ liegt D_t auf g, für $t > 8$ befinden sich A und D_t auf verschiedenen Seiten von E und für $t < 8$ liegen alle Eckpunkte der Pyramide auf derselben Seite von E. Folglich haben die Pyramide und E genau dann gemeinsame Punkte, wenn $t \geq 8$ gilt.	4	

9.1	In der Urne A können sich 4, 5 oder 6 rote Kugeln befinden.	1	
9.2	$\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{4n+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3n+1}{4n+1}=\frac{4n+2}{2\cdot(4n+1)}=\frac{2n+1}{4n+1}=\frac{15}{29}\Leftrightarrow n=7$	4	
10.1	$P(X=1{,}5)=0$	1	
10.2	Betrachtet man alle Zeitintervalle mit einer Länge von zwei Minuten, so ergibt sich für das Intervall, das symmetrisch bezüglich des Erwartungswerts ist, die größte Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Wartezeit in diesem Intervall liegt. Dabei ist der Wert dieser größten Wahrscheinlichkeit unabhängig von der Größe des Erwartungswerts. $P(\mu-1\leq X\leq\mu+1)\approx 0{,}58<0{,}6$, d. h., es gibt kein solches Zeitintervall.	4	
	Summe:	**10**	

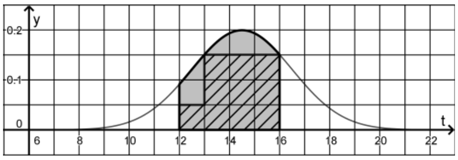
Teil B Erwartungshorizont

Aufgabe	Analysis – Pflichtaufgabe	mögliche BE	erteilte BE
1.1	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 20 \vee x = 100 \vee x = 200$ $f''(20) = -\frac{36}{625} < 0$, $f''(100) = \frac{4}{125} > 0$, $f''(200) = -\frac{9}{125} < 0$ Hochpunkte bei $x = 20$ und $x = 200$, Tiefpunkt bei $x = 100$	4	
1.2	$\int_0^k f(x)\,dx = \int_k^{240} f(x)\,dx$ liefert $k \approx 135{,}5$, d. h. die Gerade wird näherungsweise durch die Gleichung $x = 135{,}5$ beschrieben.	4	
1.3	Für $50 < x < 130$ liefert $f(x) = f(x+60)$: $x \approx 69{,}2$ Die gesuchten x-Werte sind $x \approx 69{,}2$ und $x \approx 129{,}2$, der zugehörige Funktionswert etwa 120,2.	4	
1.4.1	Mithilfe des Graphen von f und der Gerade mit der Gleichung $y = 170$ ergibt sich, dass Glukosewerte über $170\,\frac{mg}{dl}$ zwischen etwa 170 Minuten und 223 Minuten nach Beobachtungsbeginn und damit etwa 53 Minuten lang gemessen wurden.	3	
1.4.2	 I: mittlere Änderungsrate des Glukosewerts im Zeitraum von 20 Minuten bis 100 Minuten nach Beobachtungsbeginn II: momentane Änderungsrate des Glukosewerts 60 Minuten nach Beobachtungsbeginn	4	
1.4.3	Mittelwert aller Glukosewerte: $\frac{1}{80} \cdot \int_{20}^{100} f(x)\,dx \approx 129{,}2$ Mittelwert derjenigen Glukosewerte, die im angegebenen Zeitraum im Abstand von jeweils zehn Minuten gemessen wurden: $\frac{1}{9} \cdot \left(f(20) + f(30) + \ldots + f(100)\right) \approx 129{,}3$ Der Mittelwert aller Glukosewerte ist etwa 0,1 % kleiner.	5	

1.4.4	$h_k'(0) = f'(240) \Leftrightarrow k = \frac{308}{3125}$	2	
1.4.5	Der Graph von g geht aus dem Graphen von $h_{\frac{308}{3125}}$ durch eine Verschiebung um 240 in positive x-Richtung und um $f(240)$ in positive y-Richtung hervor. $g(x) = h_{\frac{308}{3125}}(x-240) + f(240)$	4	
	Summe:	**30**	

Aufgabe	Analytische Geometrie – Wahlaufgaben	mögliche BE	erteilte BE
2.1	Inhalt einer Seitenfläche: $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{4^2 + 3^2} = 15$ Inhalt der Oberfläche der Pyramide: $6 \cdot 6 + 4 \cdot 15 = 96$	4	
2.2	(3) beschreibt eine Ebene, die Symmetrieebene der Pyramide ist. Die Koordinaten von S erfüllen Gleichung (1) nicht.	3	
2.3	$\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \vec{n} = 0 \wedge \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \vec{n} = 0$ liefert $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ als Normalenvektor von E. Somit hat E eine Gleichung der Form $4y + 3z = d$. Aus $C \in E$ ergibt sich $d = 12$.	3	
2.4	Q ist ein Punkt der Lotgerade zu E durch P. Q liegt außerdem in E und ist damit der Schnittpunkt der Lotgerade mit E. Der Abstand von P zu E stimmt mit dem Abstand von P zur Grundfläche überein. Aus $\left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = t \cdot \left\|\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right\| = p$ und $4 \cdot 4t + 3 \cdot (p + 3t) = 12$ folgt: $t = \frac{3}{10}$ und $p = \frac{3}{2}$.	6	

2.5	$\dfrac{\begin{pmatrix} 4k \\ 4\sqrt{1-k^2} \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\lvert \begin{pmatrix} 4k \\ 4\sqrt{1-k^2} \\ 3 \end{pmatrix} \right\rvert \cdot \left\lvert \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rvert} = \frac{3}{5}$ Damit ist die Größe des Winkels unabhängig von k. $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ liefert $\alpha \approx 36{,}9°$.	4	
3.1	Ermitteln Sie die Koordinaten des Schnittpunkts der Gerade AE mit der z-Achse.	2	
3.2	Es gilt: $\tan\alpha = \frac{32{,}22}{0{,}45\cdot\sqrt{2}}$, d. h. $\alpha \approx 89°$	2	
3.3	$\frac{1}{2}\cdot\left(\left\lvert\overrightarrow{AB}\right\rvert + \left\lvert\overrightarrow{EF}\right\rvert\right)\cdot\left\lvert\begin{pmatrix} -0{,}1 \\ 0 \\ 7{,}16 \end{pmatrix}\right\rvert \approx 5{,}7$, d. h. der Flächeninhalt beträgt etwa $5{,}7\,\text{m}^2$.	4	
3.4	$\left(\frac{1}{3}\cdot\left\lvert\overrightarrow{AB}\right\rvert^2\cdot 32{,}22 - \frac{1}{3}\cdot\left\lvert\overrightarrow{EF}\right\rvert^2\cdot(32{,}22-7{,}61)\right)\cdot 2{,}6\,\text{t} \approx 12\,\text{t}$	5	
3.5	Aufgrund der Ähnlichkeit maßstabsgetreuer Körper folgt aus dem Ähnlichkeitsfaktor $k = \frac{90\,\text{cm}}{18\,\text{cm}} = 5$ und $k^3 = 125$ ein Verhältnis der Volumina von $1:125$.	2	
3.6	Gerade durch S mit dem Richtungsvektor $\vec{v}$: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_S \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$ $z_S - 2t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{z_S}{2}$ liefert als Schnittpunkt von g mit der xy-Ebene: $S'\left(\frac{z_S}{2} \mid \frac{z_S}{2} \mid 0\right)$ Für $z_S > 0$ liefert $\left\lvert\overrightarrow{BS'}\right\rvert = 5{,}1$: $z_S \approx 8{,}1$, d. h. die Höhe des Obelisken beträgt etwa 8,1 m.	5	
	Summe:	**20**	

Aufgabe	Stochastik – Wahlaufgaben	mögliche BE	erteilte BE
4.1.1	Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass 210 Jahreskartenbesitzer das Schwimmbad besuchen, beträgt etwa 2,2 %.	2	
4.1.2	$P(X > 210) \approx 21{,}6\,\%$	2	
4.1.3	$P(194 \le X \le 206) \approx 37{,}2\,\%$	2	
4.1.4	$P(X < 183) \approx 0{,}09$, $P(X < 184) \approx 0{,}11$ Damit: $k = 183$	3	
4.2.1	Zeitraum: 14:00 Uhr bis 15:00 Uhr	1	
4.2.2	 Der Inhalt der grau markierten Fläche entspricht der Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Badegast das das Schwimmbad zwischen 12:00 Uhr und 16:00 Uhr betritt. Dieser Inhalt ist größer als der Inhalt der schraffierten Fläche, der $10 \cdot 1 \cdot 0{,}05 = 0{,}5$ beträgt.	4	
4.2.3	$P(7 \le Y \le k) = \frac{1500}{2500}$ liefert $k \approx 15$, d. h. mit dem Eintreffen des eintausendfünfhundertsten Badegasts ist etwa um 15:00 Uhr zu rechnen.	3	
4.2.4	Die Argumentation wird dem Sachzusammenhang nicht gerecht. Begründung: Bezeichnet man die Zufallsgröße mit Y, so gilt $1 - P(7 \le Y \le 21) \approx 0{,}1\%$. Dem Betreten des Bads außerhalb der Öffnungszeiten wird durch die Zufallsgröße also eine vernachlässigbar kleine Wahrscheinlichkeit zugeordnet.	3	

<table>
<tr><td>5.1</td><td>Zufallsexperiment: 200 Personen der betrachteten Gruppe werden zufällig ausgewählt.
Ereignis: „Weniger als 55 Personen ernähren sich häufig von Fertiggerichten.“</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>5.2</td><td>$0{,}7^n < 0{,}01 \quad \Leftrightarrow \quad n > 12{,}91$
Mindestens 13 Personen müssen ausgewählt werden.</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>5.3</td><td><table>
<tr><td></td><td>F</td><td>$\overline{F}$</td><td></td></tr>
<tr><td>Z</td><td>24 %</td><td>28 %</td><td>52 %</td></tr>
<tr><td>$\overline{Z}$</td><td>6 %</td><td>42 %</td><td>48 %</td></tr>
<tr><td></td><td>30 %</td><td>70 %</td><td>100 %</td></tr>
</table>
Der Term $P\left(F \cap \overline{Z}\right)$ gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass sich eine Person häufig von Fertiggerichten ernährt, dabei aber nicht zu viel Zucker verzehrt.</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>5.4</td><td>$\binom{5}{0} \cdot 0{,}06^0 \cdot 0{,}42^5 + \binom{5}{1} \cdot 0{,}06^1 \cdot 0{,}42^4 + \binom{5}{2} \cdot 0{,}06^2 \cdot 0{,}42^3$</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>5.5.1</td><td>$P_{0,3}^{450}\left(Y \geq 152\right) \approx 0{,}046; \quad P_{0,3}^{450}\left(Y \geq 153\right) \approx 0{,}037$
Somit wird die Nullhypothese verworfen, wenn sich mindestens 153 Befragte von Fertigprodukten ernähren. Wenn sich weniger als 153 Befragte von Fertigprodukten ernähren, kann die Nullhypothese nicht verworfen werden.</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>5.5.2</td><td>$P_{0,32}^{450}\left(Y \leq 152\right) \approx 0{,}805$
Der Fehler zweiter Art ist mit 80,5 % sehr hoch.</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Summe:</td><td>20</td><td></td></tr>
</table>